

NAGYON BONYOLULT DINAMIKÁJÚ EGYSZERŰ MATEMATIKAI MODELLEK*

R. M. MAY

Princeton

Az elsőrendű differenciaegyenletek számos összefüggésben merülnek fel a biológiai, a közgazdasági és a társadalomtudományokban. Az ilyen egyenletek, még ha egyszerűek és determinisztikusak is, meglepően sokféle dinamikus viselkedést képesek mutatni a stabilis egyensúlyi ponttól a stabilis ciklusok bifurkáló hierarchiáján keresztül a látszólagosan véletlen fluktuációkig. Következésképpen sok lebilincselő probléma létezik, amelyek közül néhány a trajektóriák finomszerkezetének kényes matematikai vonatkozásaival, néhány pedig a gyakorlati következményekkel és az alkalmazásokkal kapcsolatos. Ez a cikk ezek értelmező áttekintését adja.

A különféle tudományágakban sok olyan helyzet van, amely — legalábbis durva első közelítésként — elsőrendű differenciaegyenlettel írható le. Az ilyen modellek dinamikus viselkedésének tanulmányozása általában abból áll, hogy megtaláljuk az állandó egyensúlyi pontokat és utána lineáris analízist végzünk, hogy meghatározzuk a kis zavarásokkal szemben tanúsított stabilitásukat; a kifejezetten nemlineáris dinamikai tulajdonságokat általában nem vesszük figyelembe.

Az újabb kutatások azonban megmutatták, hogy a legeszegegyszerűbb nemlineáris differenciaegyenlet is a dinamikus viselkedés különlegesen gazdag spektrumával rendelkezhet a stabilis egyensúlyi pontoktól a stabilis ciklusok sorozatán keresztül egy olyan tartományig, amelyben a viselkedés (még ha teljesen determinisztikus is) sok tekintetben „kaotikus”, vagyis megkülönböztethetetlen egy véletlen folyamat trajektóriájától.

Ennek az áttekintő cikknek több célja van.

Először: bár a nemlineáris jelenségek fő jellemzőit már sokan felfedezték, és egymástól függetlenül újra felfedezték, nem ismerek olyan forrásmunkát, ahol az összes fontosabb eredmény össze lenne gyűjtve. Ezért megkíséreltem, hogy egy ilyen áttekintő beszámólót nyújtsak. Ezt rövid és leíró módon teszem és bevettem némi új anyagot is; a részletes matematikai bizonyítások a technikai irodalomban találhatóak, amelyekre csak utalok.

Másodszor: bemutatok néhány érdekes matematikai kérdést, amelyek nem látszanak teljesen megoldottnak. Néhány a problémák közül gyakorlati vonatkozású: véletlenszerűnek tűnő trajektóriák valószínűségi leírása, még ha az alapszerkezetük determinisztikus is. Más problémák önmagukban matematikailag érdekesek és olyan dolgokat foglalnak magukba, mint a bifurkációs szerkezet patológiája, vagy a valóban véletlen viselkedés, amely akkor adódhat, ha az (1) egyenletben levő $F(X)$

* Ez a dolgozat fordítása a következőnek: May, R. M. "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature* 261 (1976) 459—467. © 1976. Macmillan Journals Limited. A fordítás közléséhez a szerző és a folyóirat hozzájárult.

függvény nem analitikus. Célul tűztem ki a kutatás elősegítését ezekben a kérdésekben, különösen az adatfeldolgozással kapcsolatos gyakorlati kérdésekben.

Harmadszor: áttekintünk néhány olyan területet, ahol ezek a gondolatok gyakorlati alkalmazást nyerhetnek. Az ilyen alkalmazások sora az elvont modellektől (ahol például egy stabilis egyensúlyi ponttól a káoszig való átmenet egy folyadékban a turbulencia kialakulásának modelljéül szolgálhat) a biológiai populációk dinamikus viselkedésének modelljeiig terjedhet (ahol kutathatjuk a szabadban vagy laboratóriumban mért adatok felhasználását a differenciaegyenlet paraméterértékeinek becslésére).

Negyedszer: tömör ismertetést adunk annak az irodalmáról, hogy a viselkedésnek ez a spektruma (stabilis egyensúlyi pontok, stabilis ciklus, káosz) hogyan jöhet létre másod- vagy magasabb rendű differenciaegyenletekben (azaz kettő vagy több dimenzióban: kettő vagy több kölcsönható faj esetén), ahol a káosz kialakulása általában kevesebb szigorú nemlinearitást követel. E szempontból a differenciálegyenleteket is áttekintettük; úgy tűnik, hogy elsőrendű differenciálegyenletek esetén háromdimenziós rendszer szükséges a kaotikus viselkedés megnyilvánulásához.

Az áttekintés egy evangéliumi könyörgéssel zárul arról, hogy mutassuk be ezeket a differenciaegyenleteket az elemi matematikai tanulmányok során, hogy a tanulók intuíciója gazdagodhassék azáltal, hogy meglátják, hogy milyen vad dolgokat csinálhatnak ezek az egyszerű nemlineáris egyenletek.

Elsőrendű differenciaegyenletek

Az egyik legegyszerűbb rendszer, amit egy ökológus tanulmányozhat, egy olyan időszakosan szaporodó populáció, amelyben a generációk között nincs átfedés [1—4]. Sok természetes populáció, különösen a mérsékelt égövi rovarok (köztük sok gazdaságilag fontos szántóföldi és gyümölcsösökerti kártevő) tartozik ezek közé. Ebben a helyzetben az észlelt adatok általában a maximumra, az átlagra vagy az egyes generációk össznépességére vonatkoznak. A kutatók igyekeznek megérteni, hogy a $t+1$ -edik generáció populációjának X_{t+1} nagysága hogyan függ a megelőző, t -edik generáció populációjának X_t nagyságától; egy ilyen összefüggést az

$$(1) \quad X_{t+1} = F(X_t)$$

általános képlettel fejezhetjük ki. Az $F(X)$ függvény általában az, amit egy biológus „sűrűségfüggőnek”, egy matematikus pedig nemlineárisnak hív; az (1) egyenlet ekkor egy elsőrendű, nemlineáris differenciaegyenlet.

Bár ezentúl követni fogom azt a szokást, hogy az X változóról mint „populációról” beszélek, a biológián kívül is számtalan olyan helyzet van, ahol az (1) alapegyenlet alkalmazható. A biológián belül is vannak más példák, például a genetikában [5, 6] (ahol az egyenlet a gényakoriság időbeli változását írja le), vagy a járványtanban [7] (ahol a lakosság megfertőzött hányada a t időpontban). A közgazdasági példák között vannak modellek az árucikk mennyisége és ára közötti kapcsolatra [8], a gazdasági ciklusok elméletére [9] és olyan időbeli sorozatokra, amelyeket különböző más gazdasági mennyiségek állítanak elő [10]. Az (1) általános egyenlet a társadalomtudományok számára is megfelelő [11], felmerül például a tanulás elméleteiben (ahol X azon információ biteinek száma lehet, amit az ember

meg képes jegyezni egy t intervallum után), vagy a hírek elterjedésének a leírására a különböző szerkezetű társadalmakban (ahol X azon emberek száma, akik már hallották a hírt t időpontig). A találekony olvasó találhat más szövegösszefüggéseket is az (1) egyenletre.

Sok ilyen esetben, különösen a biológiai populációknál, létezik egy olyan tendencia, hogy az X változó növekszik egyik generációról a másikra, ha X kicsi, és csökken, ha X nagy. Ez azt jelenti, hogy az $F(X)$ nemlineáris függvény gyakran a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $F(0)=0$; $F(X)$ monoton növekszik X növekedésével a $0 < X < A$ tartományban ($F(X)$ a maximális értékét az $X=A$ pontban veszi fel) és $F(X)$ monoton csökken, ha X növekszik $X=A$ fölött. Ezenfelül $F(X)$ általában tartalmaz egy vagy több paramétert, amelyek „hangolják” a viselkedés nemlinearitását: olyan paramétereket, amelyek meghatározzák az $F(X)$ görbe púpjának csúcosságát. Ezeknek a paramétereknek tipikusan van valamilyen biológiai, gazdasági vagy társadalmi jelentésük.

Egy speciális példa a következő egyenlet [1, 4, 12–23]:

$$(2) \quad N_{t+1} = N_t(a - bN_t)$$

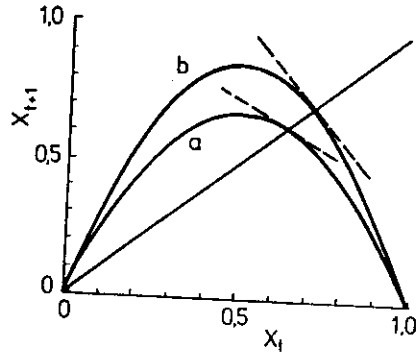
Ezt néha „logisztikus” differenciaegyenletnek hívják. A $b=0$ szélsőséges esetben ez egy populáció tisztán exponenciális növekedését írja le ($a > 1$ mellett); ha $b \neq 0$, akkor a négyzetes nemlinearitás egy olyan púppal rendelkező növekedési görbét eredményez, amelynek csúcosságát az „ a ” paraméter határozza meg. Az $X = bN_t/a$ jelölést bevezetve, az egyenlet kanonikus alakra hozható [1, 4, 12–23]:

$$(3) \quad X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$$

Ebben a formában — amit az 1. ábrán illusztrálunk — vitathatatlanul ez a legegyszerűbb nemlineáris differenciaegyenlet. A (3) egyenletet fogom használni a legtöbb numerikus példára és magyarázatra ebben a cikkben. Bár a (3) egyenlet különleges egyszerűsége miatt vonzó a matematikusok számára, a gyakorlati alkalmazásokban hátrány, hogy megköveteli X -től, hogy a $0 < X < 1$ intervallumban maradjon; ha X valaha is túlnő az egységen, a rákövetkező iterációk $-\infty$ -hez divergálnak (ami azt jelenti, hogy a populáció kihal). Ezenkívül a (3)-beli $F(X)$ függvény ($X=1/2$ -nél) az $a/4$ maximumot veszi fel, az egyenlet ezért nemtriviális dinamikus viselkedést csak akkor mutat, ha $a < 4$. Másfelől az összes trajektória $X=0$ -ba megy, ha $a < 1$. Így a nemtriviális dinamikus viselkedéshez követelmény: $1 < a < 4$, ha ez nem teljesül, a populáció kihal.

Egy másik példa, amely mélyebben gyökerezik a biológiai irodalomban [1, 23–27], az

$$(4) \quad X_{t+1} = X_t \exp[r(1 - X_t)]$$



1. ábra. Az X_{t+1} és X_t közötti kapcsolat tipikus példája ahogyan az (1) egyenlet leírja. Ezek a (3) egyenlet görbéi, ha $a=2,707$ (a); és $a=3,414$ (b). A szaggatott vonalak jelölik a meredekséget a fixpontokban, ahol $F(X)$ metszi a 45° -os egyenest. Az „a” esetben a meredekség kisebb, mint -45° és a fixpont stabilis; a „b” esetben a meredekség nagyobb, mint -45° és a pont instabilis.

egyenlet. Ez is leírja azt, hogy a populáció hajlamos az egyszerű exponenciális növekedésre kis sűrűség esetén és csökkenésre nagy sűrűség esetén. E nemlineáris viselkedésnek a csúcosságát az r paraméter hangolja. A modell elfogadható egy olyan egyetlen fajból álló populációra, melynek egyedszámát nagy sűrűség esetén járványos betegség szabályozza [28]. A (4) egyenlet $F(X)$ függvénye kissé bonyolultabb, mint a (3) egyenleté, de ezért az az előny kárpótolja az embert, hogy a lokális stabilitás maga után vonja a globális is, minden $X > 0$ -ra [1].

Az (1) egyenlet egymaximumú függvényeire a (3) és (4) képleteken felül további példákat is vehetnénk az ökológiai irodalomból. Egy meglehetősen teljes ilyen katalógust ad — irodalmi hivatkozásokkal kiegészítve — MAY és OSTER [1]. Más egyszerű matematikai függvényeket adnak meg METROPOLIS és mtsai [16]. A későbbiekben más $F(X)$ függvényeket is tárgyalunk a „matematikai furcsaságok” címszó alatt.

Az (1) egyenlet dinamikai tulajdonságai

Az (1) egyenlet lehetséges konstans, egyensúlyi X értékeit (fixpontjait) algebrailag megkaphatjuk az $X_{t+1} = X_t = X^*$ behelyettesítéssel, és az

$$(5) \quad X^* = F(X^*)$$

egyenlet megoldásával. Ezzel ekvivalens grafikus módszer, ha megtaláljuk azokat a pontokat, ahol az X_t -ből az X_{t+1} -be való átmenetet ábrázoló $F(X)$ görbe metszi a 45° -os egyenest, ekkor $X_{t+1} = X_t$, ami megfelel a zéró populációnövekedés ideális nirvánájának, l. az 1. ábrán. A fent tárgyalt és a (3) és a (4) egyenletekkel bemutatott egymaximumú görbéknek két ilyen pontjuk van: a triviális megoldás: $X = 0$, és az X^* nemtriviális megoldás (amely a (3) egyenletnél $X^* = 1 - [1/a]$).

A következő kérdés az X^* egyensúlyi pont stabilitására vonatkozik. Látható [24, 25, 19—21, 1, 4], hogy ez az $F(X)$ görbe X^* pontban vett irántangensétől függ. Ezt az irántangenset, amelyet az 1. ábrán szaggatott vonal jelöl, a

$$(6) \quad \lambda^{(1)}(X^*) = \left[\frac{dF}{dX} \right]_{X=X^*}$$

képlet határozza meg. Amíg ez az irántangens 45° és -45° között van (azaz $\lambda^{(1)}$ $+1$ és -1 közötti) és hegyesszöget alkot a 45° -os zéró növekedési vonallal, az X^* egyensúlyi pont legalább lokálisan stabilis, a szomszédságból az összes trajektóriát magához vonzza. A (3) egyenletben például ez az irántangens $\lambda^{(1)} = 2 - a$, az egyensúlyi pont ezért akkor és csak akkor stabilis és vonzza az összes $0 < X < 1$ intervallumból eredő trajektóriát, ha $1 < a < 3$.

Amint a lényeges paramétereket változtatjuk, úgy válik az $F(X)$ görbe egyre meredekebb és meredekebb csúcsová, a stabilitást meghatározó irántangens így végül is -45° -nál kisebb meredekségű lesz (azaz $\lambda^{(1)} < -1$), aminek következtében az X^* egyensúlyi pont nem lesz többé stabilis.

Mi történik ezután? Mi történik például, ha $a > 3$ a (3) egyenletben?

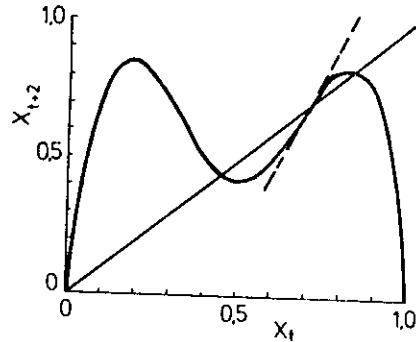
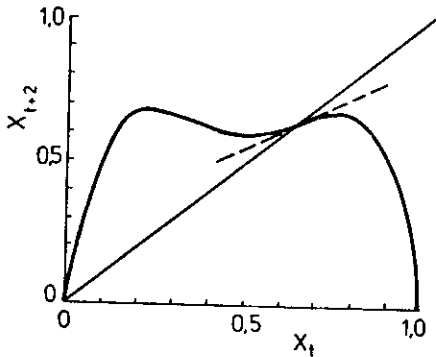
Hogy válaszoljunk erre a kérdésre, segítségünkre lesz, ha megnézzük azt az ábrát, amelyik a populációk két, egymást követő generáción át ható kapcsolatát mu-

tatja be, azaz ha megnézzük azt a függvényt, amelyik X_{t+2} -t X_t -vel hozza össze-
függésbe. Az (1) egyenlet második iteráltját

$$(7) \quad X_{t+2} = F[F(X_t)]$$

-ként írhatjuk, illetve bevezetve egy nyilvánvaló jelölést:

$$(8) \quad X_{t+2} = F^{(2)}(X_t)$$



2. ábra. A (3) egyenlet kétszeres iterációjából kapott X_{t+2} és X_t közötti viszony képe. Az ábra az 1. ábra „a” esetére vonatkozik, amikor $a=2,707$: az alap fixpont stabilis, és ez az egyedüli pont, amelynél $F^{(2)}(X)$ metszi a 45° -os vonalt (ahol az iránytangense, melyet a szaggatott vonal mutat, kevésbé meredek, mint 45°).

3. ábra. Épp olyan, mint a 2. ábra, kivéve, hogy itt $a=3,414$, mint az 1. ábrán a „b” esetben. Az alap fixpont most instabilis: $F^{(2)}(X)$ iránytangensének a meredeksége ebben a pontban 45° alatt van, ami két, kettes periódusú új megoldás megjelenéséhez vezet. (Az eredeti közleményben a 2. és 3. ábra felcserélődött. A ford. megjegyzése.)

A (3) egyenletből így származtatott függvény a 2. és 3. ábrán látható. Azokat a populáció értékeket, melyek ismétlődnek minden második generációban (azaz fixpontok kettes periódussal) X_2^* -gal jelölhetjük és meghatározhatjuk, mind az

$$(9) \quad X_2^* = F^{(2)}(X_2^*)$$

algebrai formából, mind grafikusán az $F^{(2)}(X)$ görbe és a 45° -os egyenes metszéspontjából, amint az a 2. és 3. ábrán látható. Világos, hogy az (5) egyenlet X^* egyensúlyi pontja a (9) egyenlet egy megoldása; az egyes periódusú alapvető fixpont a kettes periódusú megoldás egy degenerált esete. Tegyük most egy egyszerű, de döntő megfigyelést [1]: az $F^{(2)}(X)$ görbe iránytangense az X^* pontban, amelyet $\lambda^{(2)}(X^*)$ -gal jelölünk és a 2. és 3. ábrán szaggatott vonallal ábrázolunk, az $F(X)$ megfelelő iránytangensének a négyzete.

$$(10) \quad \lambda^{(2)}(X^*) = [\lambda^{(1)}(X^*)]^2$$

Éz a tény lehetővé teszi, hogy megvilágítsuk, mi történik, ha az X^* fixpont instabilissá válik. Ha $F(X)$ iránytangense kisebb, mint -45° (azaz $|\lambda^{(1)}| < 1$), amint azt az „a” görbe mutatja az 1. ábrán, akkor X^* stabilis. A (10) egyenletből következően ez azt is jelenti, hogy $0 < \lambda^{(2)} < 1$, azaz $F^{(2)}$ megfelelő iránytangense X^* -nál 0° és

45° között fekszik, amint az a 2. ábrán látható. Amíg az X^* fixpont stabilis, ez jelenti a (9) egyenlet egyetlen nem triviális megoldását. Másfelől, ha a $\lambda^{(1)}$ meredeksége -45° -on túlmegy (azaz $|\lambda^{(1)}| > 1$), amint azt a „b” görbe mutatja az 1. ábrán, X^* instabilissá válik. Ugyanakkor a (10) egyenletből ez azt jelenti, hogy $\lambda^{(2)} > 1$, azaz az $F^{(2)}$ függvény megfelelő iránytangense az X^* helyen meredekebb, mint 45° , amint azt a 3. ábra mutatja. Ekkor $F^{(2)}(X)$ egy kanyart ír le és két új fixpont jelenik meg kettes periódussal, mint az a 3. ábrán látható.

Röviden, ha az (1) egyenlet $F(X)$ nemlineáris függvénye túl meredek csúcsúvá válik, az X^* alapvető fixpont instabilissá válhat. Pontosan annál az értéknél, amely-nél ez megtörténik, két új és kezdetben kettes periódusú fixpont születik, amelyek között a rendszer kettes periódusú stabilis ciklusban ingadozik. A grafikus analízis 1., 2. és 3. ábrán látható módja, és a (10) egyenlet mindaz, ami ennek az általános eredménynek az elfogadásához szükséges [1, 4].

Épp úgy, mint a korábbiakban, a kettes periódusú ciklus stabilitása függ az $F^{(2)}(X)$ görbének a két pontban vett iránytangensétől. (Könnyen belátható, hogy az iránytangens mindkét pontban azonos [1, 20] és általánosabban a k periódusú ciklus mind a k pontjában azonos. Ráadásul elképzelve a közbenső állapotokat a 2. és 3. ábrák között, a stabilitást meghatározó iránytangensnek az értéke $\lambda = +1$ a két pontos ciklus megszületésénél, ezután csökken 0-n keresztül $\lambda = -1$ -ig, aszerint, ahogyan $F(X)$ csúcsa változtatja a meredekségét. Túl ezen a ponton a kettes periódusú pontok instabilissá válnak és bifurkálódnak egy kezdetben stabilis ciklust adva négyes periódussal. Ez módot ad egy nyolcas periódusú ciklus kialakulására, majd onnan a 16, 32, 64, ..., 2^n periódusú bifurkálódó stabilis ciklusok hierarchiájának kialakulásá-ra. Minden egyes esetben, amint a k periódusú stabilis ciklus instabilissá válik, ugyanakkor bifurkálódik egy új és kezdetben stabilis $2k$ periódusú ciklust alkotva, alapvetően hasonlóképpen, mint azt $k=1$ -re felvázoltuk. Az anyagról egy teljesebb és pontosabb beszámolót ez ideig csupán [1] tartalmaz.

Ezt a „nagyon szép bifurkációs jelenséget” [22] a (3) egyenlet példáján a 4. ábrán írjuk le. Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy a folyamat általános a legtöbb $F(X)$, szabályozható csúcosságú púppal rendelkező függvényre. METROPOLIS és mtsai [16] úgy utalnak a 2^n periódusú ciklusok hierarchiájára, mint az X^* fixpontok felharmonikusaira.

Bár ez a folyamat 2^n ($n \rightarrow \infty$) periódusú ciklusok végtelen sorát állítja elő, a paraméterértékek olyan „ablaka”, amelyben bármely ciklus stabilis, folyamatosan csökken, úgyhogy a teljes folyamat konvergens, mivel felső korlátja valamelyik kritikus paraméterérték. (Ez igaz a legtöbb, de nem az összes $F(X)$ függvényre. Lásd a (17) egyenletet lejjebb.) Ez a kritikus paraméterérték a 2^n periódusú ciklusok torlódási pontja. A (3) egyenletnél ezt a_c -vel jelöljük: $a_c = 3,5700\dots$

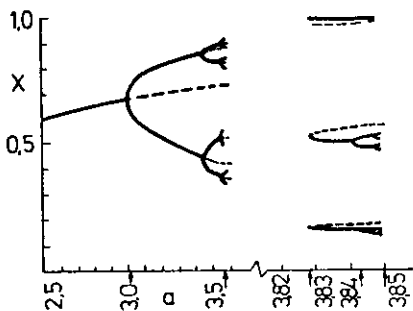
E torlódási ponton túl (pl. $a > a_c$ a (3) egyenletben) végtelen számú különböző periódusú fixpont és végtelen számú különböző periódusú ciklus van. Van nem megszámlálható számú olyan X_0 kezdőpont is, amelyből teljesen aperiodikus (bár korlátos) trajektória ered; nem számít, hogy milyen sokáig tart az $F(X)$ által generált idősor, a minta sohasem ismétlődik. Ezekre a tényekre sok módszer alapítható [1, 4, 20, 22, 29]. Az ilyen helyzetet, amikor végtelen számú különböző pályát kaphatunk, LI és YORKE [20] „kaotikusnak” nevezte el.

Amint a paraméter túlhaladja a kritikus értéket, először még az összes ciklus páros periódusú, X^* fixpont, X_i felső és alsó értékek között váltakozik. Bár ezek a

ciklusok valójában nagyon bonyolultak is lehetnek (lehet például 5726 pontot tartalmazó nem degenerált periódusuk az ismétlődésig), az avatatlan szemlélő számára olyannak tűnnek, mint egy „zajos” kettő periódusú ciklus. Amint a paraméterérték tovább nő, elérkezik egy szint (a (3) egyenletnél $a=3,6786$ -nál), amikor az első páratlan periódusú ciklus megjelenik. Először e páratlan ciklusok periódusa nagyon hosszú, de a paraméterérték növekedésével mind kisebb és kisebb lesz, míg végül a három pontból álló ciklus jelenik meg. (A (3) egyenletnél $a=3,8284\dots$ -nál). E ponton túl vannak ciklusok minden egész periódussal, valamint van több, mint megszámlálható számú aszimptotikusan aperiodikus trajektória: LI és YORKE [20] ennek az eredménynek az eredeti bizonyítását „Hármas periódus káoszt okoz” címmel közölte. A „káosz” kifejezés dinamikus trajektóriák olyan képét idézi fel, melyek megkülönböztethetetlenek egy sztochasztikus folyamattól. A (3), (4) egyenletek és más hasonló egyenletek dinamikáinak numerikus szimulációi [12, 15, 21, 23, 25] megerősítik ezt a benyomást. Ugyanakkor az olyan sima és „érzékeny” függvényeknél, mint a (3) és (4) egyenlet, alapvető matematikai tény az, hogy bármely rögzített paraméterértékhez létezik egy egyedüli ciklus, amely stabil és amely lényegében az összes kezdőpontot vonzza [22, 29] (lásd [4] „A” függelékének egyszerű és világos magyarázatát). Azaz létezik egy ciklus, mely „birtokolja” csaknem az összes kezdőpontot; a maradék végtelen számú többi ciklus, az aszimptotikusan aperiodikus trajektóriákkal együtt egy olyan ponthalmazt birtokol, mely bár megszámlálhatatlan elemű, de nullmértékű.

Amint azt az alábbi 3. és 4. táblázat megvilágítja, minden egyes speciális stabilis ciklus valószínűleg egy rendkívül szűk paraméterérték ablakot foglal el. Ez a tény, azzal együtt, hogy általában hosszú idő kell ahhoz, hogy egy adott kezdeti feltételhez tartozó tranzien viselkedés lecsillapodjék, azt jelenti, hogy a gyakorlatban nem valószínű, hogy az egyetlen (stabilis) ciklus ne lenne elfeledve és hogy valószínűleg a dinamika sztochasztikus leírása megfelelőbb az alapul szolgáló determinisztikus struktúra ellenére. Ezt a pontot fogjuk továbbfolytatni alább a „gyakorlati alkalmazások” címszó alatt.

E szakasz fő mondanivalóját az 1. táblázatban foglaltuk össze, amely a (3) és (4) egyenletek dinamikus viselkedésének különböző módjait tárja elénk, mint a válasz nemlinearitásának mértékét meghatározó „a”, ill. „r” paraméterek függvényeit.



4. ábra. Ez az ábra bemutat néhányat azok közül a különböző periódusú stabilis (—) és instabilis (---) fixpontok közül, amelyeket bifurkációs folyamatok nyomán kaphatunk általánosságban az (1), itt speciálisan a (3) egyenlet alapján. Balra az alapjában stabilis fixpont instabilissá válik és 2ⁿ periódusú stabilis felharmonikusokat állít elő villa-bifurkációk sorozatával; e ciklusok egyike sem stabilis $a=3,5700$ fölött. Jobbra, két hármas periódusú ciklus jelenik meg érintő bifurkációval; az egyik kezdetől fogva instabilis; a másik kezdetben stabilis, de instabilissá válik, és módot ad 3×2^n periódusú stabilis felharmonikusok keletkezésére, amelyeknek torlódási pontjuk van $a=3,8495$ -nél. Megjegyezzük, hogy az „a” tengely skálaváltására amiólt volt szükség, hogy mindkét példát ugyanazon az ábrán ábrázzoljuk. Végtelen sok más ilyen, a magasabb periódusú cikluson alapuló ablak van.

I. TÁBLÁZAT

Az (1) egyenlet különböző egycsúcsú $F(x)$ függvényeinek összefoglalása, viselkedésük a kaotikus tartományban, megkülönböztetve az általános és nem általános dinamikai tulajdonságokat

Az (1) egyenlet $F(X)$ függvénye	$aX(1-X)$	$X \exp[r(1-X)]$	aX ; ha $X < \frac{1}{2}$ $a(1-X)$; ha $X > \frac{1}{2}$	λX ; ha $X < 1$ λX^{1-b} ; ha $X > 1$
a szabályozó paraméter	a	r	a	b
a fixpont instabilissá válik	3,0000	2,0000	1,0000*	2,0000
a kaotikus tartomány kezdete a 2 ⁿ periódusú ciklusok torlódási pontja	3,5700	2,6924	1,0000	2,0000
az első páratlan periódusú ciklus megjelenik	3,6786	2,8332	1,4142	2,6180
a hármas periódusú ciklus megjelenik és emiatt minden egész periódus jelen van	3,8284	3,1024	1,6180	3,0000
a kaotikus tartomány vége	4,0000*	∞^{++}	2,000*	∞^{++}
stabilisak-e a ciklusok a kaotikus tartományban?	Igen	Igen	Nem	Nem

* Ezen a érték alatt $X=0$ stabilis.

* Minden megoldás $-\infty$ -hez tart, ha az a érték ennél nagyobb.

** A gyakorlatban, ha r vagy b elég nagyvá válik, X végül annyira lecsökken, hogy 0-nak vehető, ami a biológiai populációk kihalását jelenti a modellben.

Ezek a tulajdonságok grafikus úton kvalitatíve megérthetők és általánosan jellemzőek az (1) egyenlet minden jól viselkedő $F(X)$ függvényére.

Most hozzáfogunk az analitikus függvények kaotikus viselkedése matematikai szerkezetének részletesebb tárgyalásához, majd a fentebb előrejelzett gyakorlati problémákhoz és a nemanalitikus függvények által mutatott viselkedési sajátosságok áttekintéséhez (mint amilyenek az 1. táblázat két jobb oldali oszlopában vannak).

A kaotikus rendszer finomszerkezete

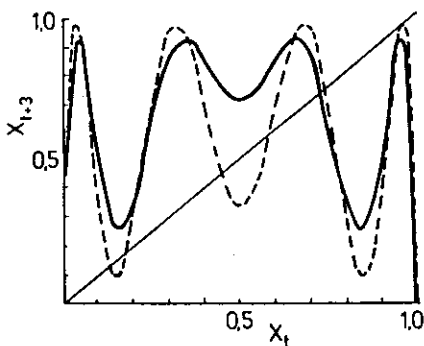
Azt már láttuk, hogy az X^* eredeti fixpont hogyan bifurkálódik 2^n periodicitású felharmonikusokat adva. De hogyan keletkeznek a k periódusú új ciklusok?

Az általános folyamatot az 5. ábra illusztrálja, amely bemutatja, hogyan keletkezik a három periódusú ciklus. A (8) egyenletnél tett megjegyzés nyilvánvaló kiterjesztése, hogy a populációt három generáció után a következő összefüggés határozza meg:

$$(11) \quad X_{t+3} = F^{(3)}(X_t)$$

Ha $F(X)$ púpja eléggé meredek, a háromszoros iteráció egy négy csúccsal rendelkező $F^{(3)}(X)$ függvényt eredményez, amint az az 5. ábrán látható a (3) egyenlet esetére.

Először ($a < 3,8284$ -re a (3) egyenletben) a 45° -os egyenes a görbét egyedül az X^* (és az $X=0$) pontban metszi, ahogy azt a folytonos vonal mutatja az 5. ábrán. Amint $F(X)$ púpja meredekebbé válik, a $F^{(3)}(X)$ hegyei és völgyei egyre kifejezettebbek, az első két völgy lesüllyed, egyidejűleg az utolsó hegy emelkedik, míg eléri a 45° -os egyenest, majd metszik azt hat új pontban, amint azt a szaggatott vonal mutatja az 5. ábrán. Ez a hat pont két különálló, három pontból álló ciklusra oszlik. A közbelső állapotok elképzelésével az 5. ábránál is belátható, hogy $F^{(3)}(X)$ stabilitást meghatározó iránytangenseinek e pontok közül háromnál közös értékük van, amely $\lambda^{(3)} = +1$ a keletkezésükénél, majd $+1$ fölé nő: ez a hármas periódusú ciklus sosem stabilis. A másik három pontban $F^{(3)}(X)$ iránytangense $\lambda^{(3)} = +1$ -nél indul, majd 0-ra csökken, egy hármas periódusú stabilis ciklust eredményezve. Ahogy $F(X)$ mereksége nő, a kezdetben stabilis három pontból álló ciklus $\lambda^{(3)}$ iránytangense -1 alá csökken, a ciklus instabilissá válik, és az előző részben tárgyalt bifurkációs folyamattal 6, 12, 24, ... 3×2^n periódusú stabilis ciklusok keletkeznek belőle. A hármas periódusú stabilis és instabilis cikluspár és a kezdetben stabilis ciklus instabilissá válásából keletkező újabb felharmonikusok keletkezését a 4. ábra jobb oldala szemlélteti.



5. ábra. Az X_{t+3} és X_t közötti, a (3) egyenlet háromszoros iterációjával kapható összefüggés. A folytonos vonal $a=3,7$ -re vonatkozik és a 45° -os egyenest csak egyszer metszi. Ha „ a ” növekszik, a hegyek és völgyek kifejezettebbé válnak. A szaggatott vonal $a=3,9$ -hez tartozik és ekkor 6 hármas periódusú új pont jelent meg (két 3-3 periódusú ciklusként).

Az elsőrendű differenciaegyenletek bifurkációs folyamatainak két alapvető fajtája van [1, 4]. Új k periódusú ciklusok párosával keletkeznek (egy stabilis, egy instabilis), amint $F(X)$ magasabb iteráltjainak hegyei és völgyei mozognak fel, illetve le, hogy metsszék a 45° -os egyenest, ahogy azt az 5. ábra ábrázolja. Ezek a ciklusok akkor keletkeznek, amikor a 45° -os egyenes a hegyeknek és völgyeknek érintőivé válik, így az $F^{(k)}(X)$ görbe kezdeti iránytangense ezekben a pontokban $\lambda^{(k)} = +1$; a bifurkációnak ezt a típusát érintő bifurkációnak vagy $\lambda = +1$ bifurkációnak hívhatjuk [1, 4]. Viszont fordítva, egy eredetileg stabilis k periódusú ciklus instabilissá válhat, amint $F(X)$ meredekebbé válik. Ez akkor történik, amikor $F^{(k)}$ iránytangense ezekben a k periódusú pontokban $\lambda^{(k)} = -1$ -nél meredekebb lesz, minek következtében egy új és kezdetben stabilis $2k$ periódusú ciklus születik a 2. és 3. ábrán ábrázolt módon. A bifurkációnak ezt a típusát villabifurkációnak (a 4. ábra bal oldaláról kölcsönözve a képet) vagy $\lambda = -1$ bifurkációnak hívhatjuk [1, 4].

Ezt mind egybegyűjtve, leszűrhetjük, hogy ahogyan $F(X)$ paraméterei változnak, az alapvető, stabilis dinamikai egységek a k alapperiódusú ciklusok, amelyek érintő bifurkációval keletkeznek, a hozzájuk társuló $k2^n$ periódusú felharmonikusok kaszkádjával együtt, amelyek villabifurkációval képződnek. Ezen az alapon az X^* konstans egyensúlyi megoldás és a 2^n periódusú stabilis ciklusok rákövetkező hierarchiája egy általános jelenségnek csupán egy speciális esete, jóllehet nyilvánvalóan fontos (ugyanis $k=1$). Ráadásul emlékezzünk arra [1, 4, 22, 29], hogy az érzékeny,

analitikus függvényeknek (mint amilyenek a (3) és (4) egyenletben szereplők) létezik egyetlen stabilis ciklusuk $F(X)$ minden paraméterértékére. A paraméterértékek teljes tartománya ($1 < a < 4$ a (3) egyenletben, $0 < r$ a (4) egyenletben) eképpen a paraméterértékek végtelen sok ablakából áll — néhány közülük nagy, néhány elképzelhetetlenül kicsi —, de mindegyik ezen alapvető dinamikai egységek közül csupán egynek felel meg. A lenti 3. és 4. táblázat illusztrálja ezt. Ezeket az ablakokat egymástól olyan pontok különítik el (a $k2^n$ periódusú felharmonikusok torlódási pontjai), amelyeknél a rendszer igazán kaotikus vonzó ciklus nélkül; habár végtelen sok ilyen speciális paraméterérték van, ezek az összes érték intervallumában nullmértékűek.

Hogyan rendeződnek el ezek a különböző ciklusok a lényeges paraméterértékek intervallumában? Tudomásom szerint ezt a kérdést egymástól függetlenül legalább hat munkacsoport válaszolta már meg a kombinatorika elméletével [16, 30], a numerikus analízissel [13, 14], a populációbiológiával [1] és a (tágra értelmezett) dinamikus rendszerek elméletével [22, 31] kapcsolatban.

Egy kis egyszerű közelítés (aminek megvan az az előnye, hogy kis technikai apparátust igényel és az a hátránya, hogy eléggé ügyetlen) abból áll, hogy először arra a kérdésre válaszol, hogy hány k periódusú pont lehetséges? Ez azt jelenti, hogy hány különböző megoldása lehet az

$$(12) \quad X_k^* = F^{(k)}(X_k^*)$$

egyenletnek? Ha az $F(X)$ függvény eléggé meredek csúcsú, ami akkor következik be, ha a paraméterérték elég nagy, minden egymást követő iteráció megkettőzi a csúcsok számát, tehát az $F^{(k)}(X)$ függvénynek 2^{k-1} csúcsa van. Elég nagy paraméter-

2. TÁBLÁZAT

Az $F(X)$ egycsúcsú függvényből az (1) egyenlet alapján kapható $k=1$ -től 12-ig periodicitású periodikus pontok és különböző ciklusok számának listája

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a k periódusú pontok összes lehetséges száma	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
a nem degenerált k periódusú pontok összes lehetséges száma	2	2	6	12	30	54	126	240	504	990	2046	4020
a k periódusú ciklusok összes száma a degeneráltakat és/vagy a felharmonikusokat és/vagy a sohasem lokálisan stabilisakat is beleértve	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188	352
a nem degenerált ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal és az instabilis ciklusokkal együtt)	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335
a nem degenerált, stabilis ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal együtt)	1	1	1	2	3	5	9	16	28	51	93	170
a k alaperiódusú, nem degenerált, stabilis ciklusok teljes száma (tehát a felharmonikusok nincsenek benne)	1	—	1	1	3	4	9	14	28	48	93	165

értékeknél az összes hegyet és völgyet metszeni fogja a 45° -os egyenes, 2^k számú k periódusú fixpontot clállítva. Ezek a 2. táblázat felső sorában vannak felsorolva $k \leq 12$ -ig. Egy ilyen felsorolás magába foglalja azokat a degenerált pontokat, amelyek periodicitása k osztója, speciálisan a két egyes periódusú pont ($X=0$ és X^*) a (12) egyenlet degenerált megoldásai minden k -ra. Balról jobbra haladva a 2. táblázatban, ezek a degenerált pontok levonhatók, hogy megkapjuk a k alapperiódusú nemdegenerált pontok számát, amint az a 2. táblázat második sorában található. Másutt ugyanennek az eredménynek az eléréséhez bonyolultabb módokat adnak [13, 14, 16, 22, 30, 31].

Például hatos periódussal végülis $2^6=64$ pont van. Ez magába foglalja a két egyes periódusú pontot, a kettes periódusú „felharmonikus” ciklust és a hármas periódusú pontok tripllettjeiből — egy stabilisból és egy instabilisból álló párt; így összesen 10 olyan pont van, amelyek alapperiódusa 6 osztója, tehát 54 olyan pont marad, amelynek alapperiódusa 6.

A 2^k számú k periódusú pont olyan ciklusokba rendeződik, amelyek periódusak, vagy annak osztója, amelyek vagy az érintő, vagy a villa-bifurkációk eredményeiként jelennek meg, ha $F(X)$ paramétereit változtatjuk. A 2. táblázat 3. sorában találhatjuk az így megjelenő különböző k periódusú ciklusok teljes számát. A negyedik sorban ebből kivontuk a degenerált ciklusokat, hogy megkapjuk a k periódusú nem degenerált ciklusok teljes számát, ezeknek a számoknak meg kell egyezniük a második oszlop számainak k -ad részével. A negyedik sor tartalmazza a villa-bifurkációval keletkező stabilis felharmonikusokat és az érintő bifurkációval keletkező stabilis-instabilis cikluspárokat. Kivonva ebből a kezdettől fogva instabilis ciklusokat, megkapjuk azoknak a ciklusoknak a számát, amelyek stabilisak lehetnek (l. 5. sor); ezeket a számokat is meg lehet kapni elegánsabb módszerekkel [13, 16, 30]. Végül kivonhatjuk a villa-bifurkációval keletkező stabilis ciklusokat, minthogy ezek néhány egyszerűbb ciklus felharmonikusai, hogy megkapjuk a 2. táblázat utolsó sorát, mely felsorolja, a k alapperiódusú stabilis ciklusok számát.

Visszatérve a 6 periódusú példához, már szóltunk arról az öt degenerált ciklusról, amelyek periódusa 6 osztója. A maradék 54 pont felosztható egy olyan hatos periódusú ciklusra, amelyik az egyetlen stabilis hárompontos ciklus felharmonikusaként keletkezik és 4 különböző hatos periódusú cikluspárra (azaz 4 kezdetben stabilisra és 4 kezdetben instabilisra), melyek egymást követő érintős bifurkációval keletkeznek. Így alulról felfelé olvasva a 2. táblázat 6-os periódusokra vonatkozó oszlopát, a következő számokat kapjuk: 4, 5, 9, 14.

Különböző címkézési trükköket, vagy a kombinatorika elméletének módszereit alkalmazva általánosan is felsorolhatjuk a különböző ciklusok megjelenési sorrendjét: [1, 13, 16, 22]. Például a 3, 5 és 6 periódusú alap stabilis ciklusoknak (melyekből sorrendben 1, 3 és 4 van) a 6, 5, 3, 5, 6, 6, 5, 6 sorrendben kell megjelenniük: hasonlítsuk össze ezt a 3. és 4. táblázattal. METROPOLIS és mtsai [16] általános felsorolást adtak minden $k \leq 11$ periódusú ciklusról.

Ebből az következik, hogy megadva a legutóbb megjelent ciklust, lehetséges (legalábbis elvileg) összeállítani az összes olyan ciklust, amelyek addig a pontig jelennek meg. Erre egy különösen elegáns módszert adott SMALE és WILLIAMS [22], akik megmutatták például azt, hogy amikor először keletkezik a hármas periódusú stabilis ciklus, a többi olyan k periódusú pont N_k száma, amelyek ennél a lépcsőnél jelennek meg, egy *Fibonacci-szerű sorozattal* adható meg, $N_k=2, 4, 5, 8, 12, 19, 30, 48, 77, 124, 200, 323$ $k=1, 2, \dots, 12$ -re; ez különbözik az $F(X)$ meredekkébbé válása

analitikus függvényeknek (mint amilyenek a (3) és (4) egyenletben szereplők) létezik egyetlen stabilis ciklusuk $F(X)$ minden paraméterértékére. A paraméterértékek teljes tartománya ($1 < a < 4$ a (3) egyenletben, $0 < r$ a (4) egyenletben) eképpen a paraméterértékek végtelen sok ablakából áll — néhány közülük nagy, néhány elképzelhetetlenül kicsi —, de mindegyik ezen alapvető dinamikai egységek közül csupán egynek felel meg. A lenti 3. és 4. táblázat illusztrálja ezt. Ezeket az ablakokat egymástól olyan pontok különítik el (a $k2^n$ periódusú felharmonikusok torlódási pontjai), amelyeknél a rendszer igazán kaotikus vonzó ciklus nélkül; habár végtelen sok ilyen speciális paraméterérték van, ezek az összes érték intervallumában nullmértékűek.

Hogyan rendeződnek el ezek a különböző ciklusok a lényeges paraméterértékek intervallumában? Tudomásom szerint ezt a kérdést egymástól függetlenül legalább hat munkacsoport válaszolta már meg a kombinatorika elméletével [16, 30], a numerikus analízissel [13, 14], a populációbiológiával [1] és a (tágra értelmezett) dinamikus rendszerek elméletével [22, 31] kapcsolatban.

Egy kis egyszerű közelítés (aminek megvan az az előnye, hogy kis technikai apparátust igényel és az a hátránya, hogy eléggé ügyetlen) abból áll, hogy először arra a kérdésre válaszol, hogy hány k periódusú pont lehetséges? Ez azt jelenti, hogy hány különböző megoldása lehet az

$$(12) \quad X_k^* = F^{(k)}(X_k^*)$$

egyenletnek? Ha az $F(X)$ függvény eléggé meredek csúcsú, ami akkor következik be, ha a paraméterérték elég nagy, minden egymást követő iteráció megkettőzi a csúcsok számát, tehát az $F^{(k)}(X)$ függvénynek 2^{k-1} csúcsa van. Elég nagy paraméter-

2. TÁBLÁZAT

Az $F(X)$ egycsúcsú függvényből az (1) egyenlet alapján kapható $k=1$ -től 12-ig periodicitású periodikus pontok és különböző ciklusok számának listája

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a k periódusú pontok összes lehetséges száma	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
a nem degenerált k periódusú pontok összes lehetséges száma	2	2	6	12	30	54	126	240	504	990	2046	4020
a k periódusú ciklusok összes száma a degeneráltakat és/vagy a felharmonikusokat és/vagy a sohasem lokálisan stabilisakat is beleértve	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188	352
a nem degenerált ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal és az instabilis ciklusokkal együtt)	2	1	2	3	6	9	18	30	56	99	186	335
a nem degenerált, stabilis ciklusok összes száma (a felharmonikusokkal együtt)	1	1	1	2	3	5	9	16	28	51	93	170
a k alaperiódusú, nem degenerált, stabilis ciklusok teljes száma (tehát a felharmonikusok nincsenek benne)	1	—	1	1	3	4	9	14	28	48	93	165

közben végül is megjelenő k periódusú pontok teljes számától (l. a 2. táblázat felső sorát).

A fixpontok teljes számáról és megjelenésük sorrendjéről viszonylag könnyű ilyen táblázatot készíteni. Bármely konkrét $F(X)$ függvényre az a numerikus feladat, hogy megtaláljuk a paraméterértékek azon ablakait, amelyekben valamely ciklus vagy a felharmonikusai stabilisak, ezzel ellentétben viszonylag unalmas és nem elégs. Mielőtt ilyen eredményeket mutatnánk be, két különlegesen fontos paraméterértéket kell megemlítenünk.

HOPPENSTEADT és HYMEN [21] egy egyszerű grafikus módszert adtak a kaotikus tartomány azon paraméterértékének azon megkeresésére, amelynél az első páros periódusú ciklus megjelenik. Az analitikus receptjük a következő. Legyen α az a paraméter, amelyik az $F(X)$ függvény meredekségét szabályozza (például a 3. egyenletben $\alpha = a$, a (4) egyenletben $\alpha = r$), $X^*(\alpha)$ legyen az 1 periódusú fixpont (az (5) egyenlet nemtriviális megoldása) és $X_{\max}(\alpha)$ az (1) egyenlet iterációival elérhető legnagyobb érték (azaz $F(X)$ értéke a csúcspan vagy a stacionárius pontban). Az első páros periódus ciklus az

$$(13) \quad X^*(\alpha) = F^{(2)}(X_{\max}(\alpha))$$

egyenletet kielégítő α értéknél jelenik meg [21, 31].

Mint fentebb már megemlítettük, egy másik kritikus érték az, ahol a hármas periódusú ciklus először jelenik meg. Ezt a paraméterértéket az (1) egyenlet harmadik iteráltjának megoldásából nyerhetjük numerikusan: a (3) egyenletre ez $a = 1 + \sqrt[3]{8}$ [14].

MYRBERG [13] (minden $k \leq 10$ -re) és METROPOLIS és mtsai [16] (minden $k \leq 7$ -re) numerikus információt adott a (3) egyenlet stabilis ciklusairól. Ők nem a paraméterértékek ablakait adták meg, hanem csupán azt az egyetlen értéket, amelynél az adott ciklus maximálisan stabilis, azaz azt az „ a ” értéket, amelynél $F^{(k)}(X)$ stabilitás meghatározó iránytangense 0; $\lambda^{(k)} = 0$. Minthogy a k periódusú ciklus bármely pontjában az $F^{(k)}$ függvény k -szoros iteráltjának iránytangense egyszerűen e ciklus X_k^* pontjai mindegyikénél az $F(X)$ -ek iránytangenseinek a szorzata [1, 8, 20],

3. TÁBLÁZAT

A stabilis ciklusok felsorolása (6-ig terjedő alapperiódusokkal) az $X_{t+1} = aX_t(1 - X_t)$ egyenlet esetére

Az az a érték, amelynél				Az a értékek azon tartományának a szélessége, amelyen belül az alapciklus, vagy annak felharmonikusai vonzó
az alapciklus periódusa	az alapciklus először megjelenik	az alapciklus instabilitássá válik	a k 2 ⁿ periódusú felharmonikusok sorozatának mindegyike instabilitássá válik	
1	1,000 0	3,000 0	3,570 0	2,570 0
3	3,828 4	3,841 5	3,849 5	0,021 1
4	3,960 1	3,960 8	3,961 2	0,001 1
5 (a)	3,738 2	3,741 1	3,743 0	0,004 8
5 (b)	3,905 6	3,906 1	3,906 5	0,000 9
5 (c)	3,990 26	3,990 30	3,990 32	0,000 06
6 (a)	3,626 5	3,630 4	3,632 7	0,006 2
6 (b)	3,937 516	3,937 596	3,937 649	0,000 133
6 (c)	3,977 760	3,977 784	3,977 800	0,000 040
6 (d)	3,997 583	3,997 585	3,997 586	0,000 003

a $\lambda^{(k)}=0$ követelmény azt jelenti, hogy $X=A(F(X))$ stacionárius pontja, ahol $\lambda^{(1)}=0$) a kérdéses periodikus pontok egyike, ami jelentősen egyszerűsíti a numerikus számításokat.

Minden k periódusú alapciklusra (amelyek a 2. táblázat utolsó sorában található), különösen érdekes ismerni azokat a paramétereket, amelyeknél:

- (1) a ciklus először megjelenik (érintő bifurkációval);
- (2) az alapciklus instabilissá válik (és ezáltal egymást követő villa-bifurkációval $k2^n$ periódusú ciklusok felharmonikusainak kaszkádjává válik);
- (3) minden felharmonikus instabilissá válik (a $k2^n$ periódusú ciklusok torlódási pontja).

A 3. és 4. táblázat MAY és OSTER munkájának kiterjesztése [1], a (3) illetve a (4) egyenletről adják meg ezt a numerikus információt. (A torlódási pontokat egy gyorsan konvergáló iteratív eljárással számoltuk ki l. [1], „A” függelék). Néhány ilyen eredmény már GUMOWSKI és MIRA is kapott [32].

4. TÁBLÁZAT

A stabilis ciklusok felsorolása (6-ig terjedő alperiódusokkal) az $X_{t+1}=X_t \exp[r(1-X_t)]$ egyenlet esetére

Az az r érték, amelynél				Az r értékek azon tartományának a szélessége, amelyen belül az alapciklus, vagy egyik felharmonikusa vonzó
az alapciklus periódusa	az alapciklus először megjelenik	az alapciklus instabilissá válik	a $k2^n$ periódusú felharmonikusok sorozatának mindegyike instabilissá válik	
1	0,0000	2,0000	2,6924	2,6924
3	3,1024	3,1596	3,1957	0,0933
4	3,5855	3,6043	3,6153	0,0298
5 (a)	2,9161	2,9222	2,9256	0,0095
5 (b)	3,3632	3,3664	3,3682	0,0050
5 (c)	3,9206	3,9295	3,9347	0,0141
6 (a)	2,7714	2,7761	2,7789	0,0075
6 (b)	3,4558	3,4563	3,4567	0,0009
6 (c)	3,7736	3,7745	3,7750	0,0014
6 (d)	4,1797	4,1848	4,1880	0,0083

Gyakorlati problémák

A (3) egyenlet paradigmátikus példájára vonatkozólag most már láthatjuk, hogy az $1 < a < 4$ paraméterintervallum olyan értékek végtelen sok ablakának egydimenziós mozaikjából épül fel, amelyek mindegyikében egy k periódusú ciklus, vagy annak egyik felharmonikusa, lényegében az összes kezdőpontot vonzza. Ezek az ablakok $1 < a < 3,5700\dots$ -re — a $k=1$ -nek és felharmonikusainak megfelelően — a legszélesebbek és a legfeltűnőbbek. Az első torlódási ponton túl, mint ez a 3. táblázatból látható, az ablakok keskenyek, még az egészen alacsony periodicitású ciklusokra is, és az ablakok k növekedtével gyorsan szűkülnek.

Mint kiderült, egy kettősség alakul ki a meghatározó matematikai viselkedés (ami pontosan determinisztikus) és a „józan észből” eredő következtetés között, amit a numerikus szimuláció nyomán lehetne levonni. Ha az a paramétert a kaotikus tar-

tomány egy pontjában állandónak tartjuk, és a (3) egyenletet tetszőlegesen sok generáción át iteráltatják, az észlelt X_t értékek sűrűség eloszlása a 0-tól 1-ig tartó intervallumban k egyenlő tüskét (precízebben: δ -függvényt) fog adni, annak megfelelően, hogy a k pont ennek az a értéknek megfelelő stabilis cikluson van. De a legtöbb a értékre ez a ciklus elég nagy periódusú, sőt általában sok ezer generáció telik el, mielőtt újra beáll a kezdeti állapot, így a numerikus szimulációval kapott sűrűség-térkép általában úgy néz ki, mint egy folytonos eloszlásból vett minta.

HOPPENSTEADT-nek tulajdonítható a numerikus számolások egy különlegesen érdekes sorozata (személyes közlés), aki sok iterációból összeállított X egy-egy sűrűségeloszlását, a értékek olyan sorozatára, amelyek fokozatosan nőttek 3,5700-tól 4-ig. Ezeket az eredményeket mozgóképszerűen ábrázolta. Mint ahogy a 3. táblázat alapján várható, néhány a legfeltűnőbb ciklusok közül megjelent, mint δ felharmónikusa, az első ötös és hatos ciklus. De a legtöbb értékére a sűrűségeloszlás úgy néz ki, mint egy véletlen folyamat mintafüggvénye. Ez különösen igaz annak az a értéknek a környezetére, ahol az első páros ciklus megjelenik ($a=3,6786$) majd $a=4$ környezetében ismét: ez nem meglepő, mivel ezek a torlódási pontok torlódási pontjai. A stabilis ciklusok periodicitásának alapjául szolgáló nemfolytonos változások ellenére a megfigyelt sűrűségminta éles átmenetek nélkül változott. Például ahogyan a addig az értékig nőtt, amelynél a hármas ciklus megjelenik, a sűrűségeloszlás három pont körül kezdett el tömörülni, majd fokozatosan elvándorolt ettől a három ponttól, amikor a hármas ciklus és felharmónikusai instabillissá váltak.

Úgy gondolom, hogy a legérdekesebb matematikai probléma, hogy módszert találjunk néhány közelítően és „effektíve folytonos” sűrűség spektrum megalkotására, ama tény ellenére, hogy a pontos sűrűségfüggvény meghatározható és mindig δ függvények egy halmazából áll. Lehetséges, hogy ilyen technikát már kifejlesztettek az ergodelméletben [33] (amely a statisztikus mechanika alapja), mint például a „durva felbontású (coarse-grained) megfigyelések” felhasználásánál. Nem tudom.

A (4) egyenlet dinamikai tulajdonságainak egy ilyen effektíve sztochasztikus leírását nagy r -re már megcsinálták [28], noha inkább csak erre az egyenletre vonatkozó taktikai trükkökkel, semmint valamilyen általános módszerrel. Ha r kb. 3 fölé nő, az egyenletből következő trajektóriák csaknem periodikusak lesznek egyre jobb közelítéssel $(1/r) \exp(r-1)$ periódushosszal.

Az ebben a részben szelöltetett véleményem az, hogy bár a kaotikus tartomány igen finom szerkezete matematikailag érdekes, érdektelen a legtöbb gyakorlati szempontból. Amit meg kellene követelni, az a determinisztikus dinamika valamilyen effektíve sztochasztikus leírása. Amíg a különböző ciklusok különféle helyzetét és megjelenésük sorrendjét meg lehetett csinálni egy kaptafára, az aktuális dinamikák ilyen sztochasztikus leírása teljesen különböző lesz különböző $F(X)$ -ekre: tanúbizonyság erre a (4) egyenlet viselkedése — amelynek r -re sok generációként csaknem periodikus „kitörései” vannak a (3) egyenlet viselkedésével szemben, amelyik $a \rightarrow 4$ -re nem különbözik nagyon a Bernoulli-féle pénzdobálás egy sorozatától.

Matematikai furcsaságok

Mint ahogy fentebb tárgyaltuk, a stabilis ciklusok egymásutáni létezésének alapvető oka az egész kaotikus tartományban az, hogy minden új cikluspár érintő bifurkációval születik (l. 5. ábra), és az egyikük kezdetben stabilis úgy, hogy a lankás hegyek és völgyek metszik a 45° -os egyenest. Analitikus $F(X)$ függvényekre a kizárólagos olyan paraméterértékek, amelyeknél a sűrűségeloszlás vagy az invariáns mérték folytonos és valóban ergodikus, a felharmonikusok torlódási pontjai, amelyek az egyik ciklust a másiktól elválasztják. Az ilyen kivételes paraméterértékek már megtalálták az alkalmazásukat, például a (3) egyenletben, amelyik $a=4$ -re olyan, mint egy véletlenszám generátor [34, 35], amelynek $[X(1-X)]^{-\frac{1}{2}}$ -nel arányos folytonos sűrűségfüggvénye van a $0 < X < 1$ intervallumban.

A nem analitikus $F(X)$ függvények, amelyekben a csúcs valójában tüske, érdekes speciális esetet jelentenek. Elképzelhetjük a mozgó tuskés hegyeket és völgyeket, amint metszik a 45° -os vonalat az 5. ábrán és lehetséges, hogy mindkét érintő bifurkációval keletkezett ciklus kezdetől fogva instabilis (míg az egyiknél $\lambda^{(k)} > 1$, a másikonál $\lambda^{(k)} < -1$ minden $k > 1$ -re. Ekkor nincsenek stabilis ciklusok a kaotikus tartományban, ami ezáltal szó szerint kaotikus egy folytonos és tényleg ergodikus sűrűségfüggvénnyel.

Egy egyszerű példát ad az

$$X_{t+1} = aX_t; \quad \text{ha } X_t < \frac{1}{2}$$

$$(14) \quad X_{t+1} = a(1-X_t); \quad \text{ha } X_t > \frac{1}{2}$$

amely a $0 < X < 1$ intervallumban van értelmezve. Ha $0 < a < 1$, minden trajektória $X=0$ -ba tér, ha $1 < a < 2$, végtelen sok periodikus pálya van nem megszámlálható számú aperiodikus trajektóriával együtt, amelyek egyike sem lokálisan stabilis. Az első páros periódusú ciklus $a=\sqrt{2}$ -nél jelenik meg, és az összes egész periódusú jelen van $a=(1+\sqrt{5})/2$ fölött. KAC [36] gondosan disztkutálta az $a=2$ esetet. Egy másik példa, ezúttal kiterjedt biológiai pedigrcével [1-3], a következő

$$X_{t+1} = \lambda X_t; \quad \text{ha } X_t < 1$$

$$(15) \quad X_{t+1} = \lambda X_t^{1-b}; \quad \text{ha } X_t > 1$$

Ha $\lambda > 1$, az egyenlet egy globálisan stabilis egyensúlyi ponttal rendelkezik $b < 2$ -nél. $b > 2$ -re ismét igazi káosz van stabilis ciklusok nélkül: az első páros ciklus $b=(3+\sqrt{5})/2$ -nél jelenik meg és az összes egész periódus jelen van $b=3$ fölött. A (14) és (15) egyenletek dinamikai tulajdonságait a 2. táblázat jobb oldalán összegeztük.

Az analitikusság hiánya a valódi véletlenszerű viselkedés szükséges, de nem elégséges feltétele [31]. Tekintsük, például:

$$X_{t+1} = \left(\frac{a}{2}\right) X_t; \quad \text{ha } X_t < \frac{1}{2}$$

$$(16) \quad X_{t+1} = aX_t(1 - X_t); \quad \text{ha } X_t > \frac{1}{2}$$

Ez az 1. ábra és a (3) egyenlet parabolája, de úgy, hogy $F(X)$ bal oldali fele egy szűk vonalra van lelapítva. Ez az egyenlet rendelkezik a értékek ablakaival, ezek mindegyikéhez tartozik stabilis ciklus, mint ahogyan azt általánosan leírtuk feljebb. A $\lambda^{(k)}$ stabilitás-meghatározó iránytangens ugyanakkor nem folytonosan változik az a paraméterrel és az egyszerűbb stabilis tartományok szélessége kisebb, mint a (3) egyenletnél: a fixpont $a=3$ -nál válik instabilissá, és a következő felharmonikusok torlódási pontja $a=3,27\dots$ -nél van; az első páratlan ciklus $a=3,44\dots$ -nél jelenik meg; a 3 pontból álló ciklus $a=3,67\dots$ -nél (hasonlítsuk össze az 1. táblázat első oszlopával).

A nem analitikus függvények cme viselkedési szeszélyei az ergodelmélet formális kérdéseinek kutatásában lehetnek érdekesek. Ugyanakkor úgy gondolom, hogy ezek nem lényegesek a biológiai és társadalomtudományok modelljei szempontjából, ahol az olyan függvényeknek, mint az $F(X)$ analitikusoknak kell lenniük. Ezt a szempontot máshol gondosan kidolgoztuk [37].

Utolsó furcsaságként tekintsük az

$$(17) \quad X_{t+1} = \lambda X_t [1 + X_t]^{-\beta}$$

egyenletet. Ezt már felhasználták úgy, hogy rovarpopulációkra vonatkozó nagy mennyiségű adatra illesztették [38, 39]. Stabilitási viselkedését a két paraméter, λ és β függvényében a 6. ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy $\lambda < 7,39$ esetén létezik globálisan stabilis egyensúlyi pont minden β -ra; ha $7,39\dots < \lambda < 12,50\dots$ a fixpont instabilissá válik elég nagy β -ra úgy, hogy bifurkálódik egy stabilis 2 pontból álló ciklusra, ami megoldás minden nagyobb β esetén; amint λ növekszik a $12,50\dots < \lambda < 14,77\dots$ tartományban, különböző más 2^n periódusú felharmonikusok jelennek meg. A 2^n periódusú bifurkálódó ciklusok hierarchiája itt véget ér és a torlódási pontot és az ezutáni kaotikus tartományt még tetszőlegesen nagy β -ra sem érjük el, amíg $\lambda > 14,77\dots$ nem lesz.

Alkalmazások

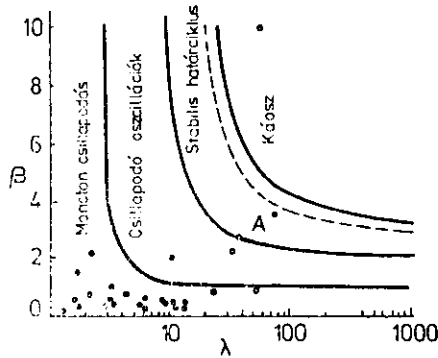
Az a tény, hogy az egyszerű és determinisztikus (1) egyenlet rendelkezhet olyan dinamikus trajektóriákkal, amelyek úgy nézhetnek ki, mint egyfajta véletlen zaj, zavaró gyakorlati következményeket okozhat. Ez azt jelenti például, hogy egy állatpopuláció egyedszámlálási adatainak látszólag szabálytalan fluktuációi nem szükségképpen tudhatók be egy nem ismert környezet szeszélyeinek vagy mintavételi hibáknak, lehet, hogy egyszerűen olyan szigorúan determinisztikus populációnövekedési összefüggés következményei, mint az (1) egyenlet. Ezt a kérdést teljesebben és gondosabban másutt tárgyalták [1].

Azt is meg lehet figyelni, hogy a kaotikus rendszerben tetszőlegesen közeli kezdeti feltételek vezethetnek olyan trajektóriákhoz, amelyek elég hosszú idő múlva

nagyon divergálnak. Ez azt jelenti, hogy még ha rendelkezünk is egy olyan egyszerű modellel, amelyben a paraméterek pontosan meghatározottak, a hosszú távú előrejelzés sohasem lehetséges. Meteorológiai összefüggésben LORNTZ [15] ezt az általános jelenséget „lepke effektus”-nak nevezte: még ha a légkört le is tudnánk írni egy olyan determinisztikus modellel, amelyben az összes paraméter ismert, egy lepke szárnyainak remegése is úgy megváltoztathatja a kezdeti feltételeket, hogy emiatt (a kaotikus rendszerben) megváltozik a hosszú távú előrejelzés.

A folyadék örvénylése egy másik klaszszikus példa, ahol ha egy paraméter (a Reynolds-szám) változik, egy determinisztikus egyenletrendszerben (a Navier–Stokes-egyenletekben) a mozgás hirtelen átmehet valamilyen stabilis elrendezésből (például lamináris áramlásból) egy látszólag sztochasztikus, kaotikus rendszerbe. Különböző, a Navier–Stokes-differenciál-egyenleteken alapuló modelleket javasoltak ennek a folyamatnak a matematikai leírására [15, 40, 41]. Az örvénylés elméletének egy újabb összefoglalójában MARTIN [42] úgy találta, hogy az (1) egydimenziós differencia-egyenlet hasznos lehet e tekintetben. Összehasonlítva a korábbi modellel [15, 40, 41] hátránya az, hogy még inkább elvont leírás, előnye pedig az, hogy rendelkezik a dinamikus viselkedés olyan spektrumával, amely nagyon gazdagon összetett, de méginkább vizsgálható analitikusan.

Egy földközeli alkalmazási lehetőség az (1) egyenlet illesztése diszkrét, egymást nem átfedő biológiai populációkra, mint amilyen sok mérsékelt égövi ízeltlábú [1, 2, 3, 38, 43]. A 6. ábra mutatja 24 természetes és 4 laboratóriumi populációra becsült λ és β paraméter értékeket [39], ha a (17) egyenletet illesztjük a rendelkezésre álló adatokra. Ez az ábra megmutatja az elméletileg stabilis területeket is: a stabilis pontot; ennek stabilis felharmonikusait (2^n periódusú stabil ciklusokat); a kaoszt. A természetes populációk stabilis egyensúlyi ponttal rendelkező viselkedésre törekednek. A laboratóriumi populációk oszcilláló vagy kaotikus viselkedésre hajlamosak; a viselkedésük túlzottan nemlineáris lehet amiatt, hogy a laboratóriumi környezetben hiányzik sok természetes halálozási faktor. Ez emlékeztethet arra, hogy a leginkább oszcilláló természetes populáció a (6. ábrán A-val jelölt) kolorádóbogár, amelyiknek a gazdanövényvel való jelenlegi kapcsolata nem evolúciós eredetű. Ezek csupán előzetes megjegyzések, amiket több szempontból óvatosan kell kezelni. Az óvatosságra intők közül kettő, hogy léteznek technikai nehézségek az adatok válogatásánál és számok csökkentésénél és hogy nem léteznek egyetlen fajú populációk a természeti világban: Egy-egy dimenziós differenciaegyenletet nyerni úgy, hogy a populáció kölcsönhatását a biológiai és fizikai környezetével passzív paraméterekkel helyettesítjük, nagy erőszakot jelenthet a valóságon.



6. ábra. A folytonos vonal jelöli a stabilitási tartományokat a (17) egyenlet paraméterei, a sűrűségétől való függést kifejező β paraméter és a λ populáció növekedési sebesség függvényében, a szaggatott vonal mutatja, hogy a kétpontos ciklus hol ad lehetőséget 2^n periódusú magasabb ciklusok kialakulására. A fekete pontok a szántóföldi populációk, az üres körök a laboratóriumi populációk élet-tani táblázatainak clemzéséből nyert adatokat jelölik ([3]-ból a [39] nyomán).

Néhányra a sok más területből, ahol ezek az eszmék már alkalmazást nyertek, hivatkoztunk feljebb, a második részben [5—11]. A céloom ezzel az áttekintő cikkel az volt, hogy elősegítsem az alkalmazásokat még más területeken is.

Rokon jelenségek magasabb dimenziókban

Elsőrendű differenciaegyenletek csatolt párpait (ezek megfelelnek egyetlen másodrendű egyenletnek) különféle összefüggésekben vizsgálták [4, 44—46] speciálisan a mérsékelt égövi izeltlábú ragadozó-zsákmány rendszerek tanulmányozásában [2—4, 23, 47]. E kétdimenziós rendszerek bonyolultsága a dinamikus viselkedés terén még összetettebb a következők miatt: (1) még az analitikus függvények esetében is lehetséges valóban kaotikus viselkedés (mint a (14) és (15) egyenletnél), az ún. „furcsa attraktorok”-nak megfelelően; és (2) kettő vagy több különböző stabilis állapot (például egy stabilis pont és egy hármas periódusú stabilis ciklus) együtt előfordulhat ugyanazokra a paraméter értékekre [4]. Tegyük hozzá, e jelenségek megjelenése általában kevésbé szigorú nemlinearitást követel (kevesbé meredek csúcsú $F(X)$ függvényt), mint egyszimenziós esetben.

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek hasonló rendszerei vagy a két csatolt elsőrendű differenciálegyenletekből álló rendszerek sokkal egyszerűbb, stabilis és instabilis pontokból és határciklusokból felépülő dinamikus viselkedéssel rendelkeznek [48]. Ez alapvetően azért van, mert a folytonos kétdimenziós rendszerekben meg lehet különböztetni egy zárt görbén kívüli és belüli tartományt; a dinamikus trajektóriák nem keresztezhetik egymást. A helyzet minőségileg sokkal bonyolultabbá válik és sok tekintetben analóggá az elsőrendű differenciálegyenletekhez, ha három vagy több csatolt, elsőrendű közönséges differenciálegyenletre térünk át (azaz közönséges differenciálegyenletekből álló háromdimenziós rendszerre). SCANLAN (személyes közlés) azt a véleményt hangoztatta, hogy a kaotikus viselkedés viselkedés és a „furcsa attraktorok”, azaz azok a megoldások, amelyek se nem pontok, se nem periodikus pályák [48], tipikusan jellemzők az ilyen rendszerekre. Néhány modellt alaposan tanulmányoztak, mint a kémiai és biológiai [49] reakció-diffúzió rendszerek modelljeit; a (háromdimenziós) *Lorenz-modellt* [15] és a négydimenziós *Rouelle—Takens-modellt* [40], melyekről feljebb szoltunk. E rendszerek analízise sokkal kevésbé áttekinthető, mint az (1) egyenleté magasabb dimenziójuk következtében.

Egy — újabban ebből a szempontból vizsgált — rendszerre explicit és eléggé meglepő példa: az ökológiában a versengő fajok leírására használt közönséges differenciálegyenletek. Egy vagy két fajra ezek a rendszerek elég unalmasak: a dinamikus trajektóriák néhány stabilis egyensúlyi pontba fognak tartani (mely mutathat együttélést, vagy egyik, vagy mindkét faj kihalását). Mint azt SMALE [50] nemrégiben megmutatta, ezek az általános egyenletek 3 vagy több fajra — bizonyos ésszerű és jól definiált értelemben — összeegyeztethetők bármilyen dinamikus viselkedéssel. SMALE [50] tárgyalása általános és elvont; MAY és LEONARD viszont tanulmányozták azt a különleges dinamikát, amelyet a jól ismert *Lotka—Volterra-egyenletek* is képesek mutatni, ha már 3 versengő faj van jelen.

Következtetés

Bár vannak még megoldatlan gyakorlati problémák, az e cikkben kifejtett elméletnek nyilvánvaló alkalmazása van sok területen.

A legfontosabb alkalmazások mindemllett a pedagógiaiak lehetnek.

A lineáris rendszerekre vonatkozó matematikai elmélet elegáns összessége (*Fourier-analízis, ortogonális függvények* stb.) és ezek sikeres alkalmazása a fizikai tudományok sok alapvetően lineáris problémájára egyeduralomra tör még a viszonylag magas szintű matematikai és elméleti fizikai tanulmányokban is. Az eképp kifejlesztett matematikai intuíció rosszul készíti fel a tanulókat arra, hogy szembenézzenek az olyan díszkrét nemlineáris rendszerek legegyszerűbbjeinek különös viselkedésével, mint amilyen a (3) egyenlet. Noha az ilyen nemlineáris rendszerek a fizikai tudományokon kívül bizonyosan a szabályosak és nem a kivételesek.

Ezért szeretném sürgetni, hogy mondjuk a (3) egyenletet alkalmazzuk be az embereknek matematikai tanulmányaik elején. Ez az egyenlet fenomenologikusan is tanulmányozható zsebszámológéppel vagy akár anélkül iterálva. Ezek a tanulmányok nem tartalmazznak annyi fogalmi meg gondolást, mint az elemi analízis. Az ilyen tanulmány nagyban gazdagítaná a tanulókat nemlineáris rendszerekre vonatkozó elképzeléseit.

Nem csak a kutatásban, de a mindennapok politikai és gazdasági világában is sokkal jobban meg lennének, ha több ember fogná fel, hogy az egyszerű nemlineáris rendszereknek nem szükségképpen egyszerűek a dinamikai tulajdonságaik.

Sok segítséget kaptam F. C. HOPPENSTEADT-tól, H. E. HUPPERTTŐL, A. I. MEES-től, C. J. PRESTONTÓL, S. SMALE-től, J. A. YORKE-től és különösen G. F. OSTER-től. A munkát részben az NSF támogatta.

IRODALOM*

- [1] MAY, R. M. and OSTER, G. F., *Am. Nat.*, **110**, 573—599 (1976).
- [2] VARLEY, G. C., GRADWELL, G. R. and HASSELL, M. P., *Insect Population Ecology* (Blackwell, Oxford, 1973).
- [3] MAY, R. M. (ed.), *Theoretical Ecology: Principles and Applications* (Blackwell, Oxford, 1976).
- [4] GUCKENHEIMER, J., OSTER, G. F. and IPAKTCI, A., *J. Math. Biol.* **4**, 101—147 (1977).
- [5] OSTER, G. F., IPAKTCI, A. and ROCKLIN, I., *Theor. Pop. Biol.*, **10**, 365—382 (1976).
- [6] ASMUSSEN, M. A. and FELDMAN, M. W., *J. Theor. Biol.* **64**, 603—618 (1977).
- [7] HOPPENSTEADT, F. C., *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics and Epidemics* (SIAM, Philadelphia, 1975).
- [8] SAMUELSON, P. A., *Foundations of Economic Analysis* (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1947).
- [9] GOODWIN, R. E., *Econometrica*, **19**, 1—17 (1951).
- [10] BAUMOL, W. J., *Economic Dynamics*, 3rd ed. (Macmillan, New York, 1970).
- [11] Lásd például: KEMENY, J. and SNELL, J. L., *Mathematical Models in the Social Sciences* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972).
- [12] CHAUNDY, T. W. and PHILLIPS, E. Q., *Jl. Math. Oxford*, **7**, 74—80 (1936).
- [13] MYRBERG, P. J. *Ann. Akad. Sc. Fennicae, A*, **1**, No. 336/3(1963).
- [14] MYRBERG, P. J., *Ann. Akad. Sc. Fennicae, A*, **1**, No. 259 (1958).
- [15] LORENZ, E. N., *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130—141 (1963); *Tellus*, **16**, 1—11 (1964).

* Az irodalomjegyzéket kiegészítettük a cikk megjelenésekor még csak nyomdában levő dolgozatok adataival. Felhívjuk a figyelmet [52]-re, amely az 1976 utáni irodalmat (és majdnem kizárólag csak azt) foglalja össze fizikusok számára. (A ford. megj.)

- [16] METROPOLIS, N., STEIN, M. L. and STEIN, P. R., *J. Combinatorial Theory*, **15**(A), 25—44 (1973).
- [17] MAYNARD SMITH, J., *Mathematical Ideas in Biology* (Cambridge University Press, Cambridge, 1968).
- [18] KREBS, C. J., *Ecology* (Harper and Row, New York, 1972).
- [19] MAY, R. M., *Am. Nat.*, **107**, 46—57 (1972).
- [20] LI, T.-Y. and YORKE, J. A., *Am. Math. Monthly*, **82**, 985—992 (1975).
- [21] HOPPENSTEADT, F. C. and HYMAN, J. M., (Courant Institute, New York University: preprint, 1975).
- [22] SMALE, S. and WILLIAMS, R. (Department of Mathematics, Berkeley: preprint, 1976).
- [23] MAY, R. M., *Science*, **186**, 645—647 (1974).
- [24] MORAN, P. A. P., *Biometrics*, **6**, 250—258 (1950).
- [25] RICKER, W. E., *J. Fish. Res. Bd. Can.*, **11**, 559—623 (1954).
- [26] COOK, L. M., *Nature* **207**, 316 (1965).
- [27] MACFADYEN, A., *Animal Ecology: Aims and Methods* (Pitman, London, 1963).
- [28] MAY, R. M., *J. Theor. Biol.*, **51**, 511—524 (1975).
- [29] GUCKENHEIMER, J., *Proc. AMS Symposia in Pure Math.*, **XIV**, 95—124 (1970).
- [30] GILBERT, E. N. and RIORDAN, J., *Illinois J. Math.* **5**, 657—667 (1961).
- [31] PRESTON, C. J. (King's College, Cambridge: preprint, 1976.)
- [32] GUMOWSKI, I. and MIRA, C., *C. r. hebéd. Seanc. Acad. Sci., Paris*, **281a**, 45—48 (1975); **282a**, 219—222 (1976).
- [33] LAYZER, D., *Sci. Am.*, **233**(6), 56—59 (1975).
- [34] ULAM, S. M., *Proc. Int. Congr. Math. 1950, Cambridge, Mass.: Vol. II*, pp. 264—273 (AMS, Providence R. I., 1950).
- [35] ULAM, S. M. and VON NEUMANN, J., *Bull. Am. Math. Soc.* (abstr.), **53**, 1120 (1947).
- [36] KAC, M., *Ann. Math.*, **47**, 33—49 (1946).
- [37] MAY, R. M., *Science*, **181**, 1074 (1973).
- [38] HASSELL, M. P., *J. Anim. Ecol.*, **44**, 283—296 (1974).
- [39] HASSELL, M. P., LAWTON, J. H. and MAY, R. M., *J. Anim. Ecol.*, **45**, 471—486 (1976).
- [40] RUELLE, D. and TAKENS, F., *Comm. Math. Phys.*, **20**, 167—192 (1971).
- [41] LANDAU, L. D. and LIFSHITZ, E. M., *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959). (Magyarul: Elméleti Fizika VI, *Hidrodinamika* Tankönyvkiadó 1980.)
- [42] MARTIN, P. C., *Proc. Int. Conf. on Statistical Physics*, Budapest (Hungarian Acad. Sci., Budapest, 1976). (Magyarul: Fizikai Szemle **28**, 121—134 (1978).)
- [43] SOUTHWOOD, T. R. E., in *Insects, Science and Society* (edit. by Pimentel, D.), 151—199 (Academic, New York, 1975).
- [44] METROPOLIS, N., STEIN, M. L. and STEIN P. R., *Numer. Math.*, **10**, 1—19 (1967).
- [45] GUMOWSKI, I. and MIRA, C., *Automatica*, **5**, 303—317 (1969).
- [46] STEIN, P. R. and ULAM, S. M., *Rosprawy Mat.*, **39**, 1—66 (1964).
- [47] BEDDINGTON, J. R., FREE, C. A. and LAWTON, J. H., *Nature*, **255**, 58—60 (1975).
- [48] HIRSCH, M. W. and SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra* (Academic, New York, 1974).
- [49] KOLATA, G. B., *Science*, **189**, 984—985 (1975).
- [50] SMALE, S., (Department of Mathematics, Berkeley: preprint, 1976).
- [51] MAY, R. M. and LEONARD, W. J., *SIAM J. Appl. Math.*, **29**, 243—253 (1975).
- [52] OTT, E., "Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems", *Rev. Mod. Phys.* **53**, 655—671 (1981).

FORDÍTOTTA: TURÁNYI TAMÁS
1195 BUDAPEST, RÓZSA FERENC U. 14.